



CANPOINT®

三三 高考复习方案

主编：肖德好

作业手册
数学

RJA

B版



延边教育出版社

第2讲 常用逻辑用语 (时间:45分钟)

基础热身

1. 命题“ $\forall x > 0, e^x + e^{-x} > 2$ ”的否定是 ()
 A. $\forall x \leq 0, e^x + e^{-x} > 2$
 B. $\exists x \leq 0, e^x + e^{-x} > 2$
 C. $\forall x > 0, e^x + e^{-x} \leq 2$
 D. $\exists x > 0, e^x + e^{-x} \leq 2$

2. 已知 $p: x \neq 3$ 且 $y \neq 2$; $q: x + y \neq 5$. 则 p 是 q 的 ()
 A. 充分不必要条件
 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件
 D. 既不充分也不必要条件

3. 已知 M, N 为全集 U 的两个不相等的非空子集, 若 $(\complement_U N) \subseteq (\complement_U M)$, 则下列命题为真命题的是 ()
 A. $\forall x \in N, x \in M$
 B. $\exists x \in M, x \notin N$
 C. $\exists x \notin N, x \in M$
 D. $\forall x \in M, x \notin \complement_U N$

4. [2023·重庆巴蜀中学月考] 已知 $p: \frac{x-1}{x+2} \leq 0$; $q: -2 \leq x \leq 1$. 则 p 是 q 的 ()
 A. 充分不必要条件
 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件
 D. 既不充分也不必要条件

5. 在 $\triangle ABC$ 中, “ $A > B$ ”是“ $\sin A > \sin B$ ”的 ()

- A. 充要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充分不必要条件
- D. 既不充分也不必要条件

6. 若“ $x \geq a$ ”是“ $x \geq 2$ ”的必要不充分条件, 则实数 a 的取值范围为 _____.

综合提升

7. [2023·湖南永州一中月考] 已知 $p: \exists x \in (0, 1), e^x - a \geq 0$. 若 p 是假命题, 则实数 a 的取值范围是 ()
 A. $a > 1$
 B. $a \geq e$
 C. $a \geq 1$
 D. $a > e$

8. [2023·南京三模] 已知向量 a, b 均为单位向量, 则“ $a \perp b$ ”是“ $|2a - b| = |a + 2b|$ ”的 ()
 A. 充分不必要条件
 B. 充要条件
 C. 必要不充分条件
 D. 既不充分也不必要条件

9. 设 m, n 是两条不同的直线, α, β 是两个不同的平面, 则 $m \perp n$ 的一个充分不必要条件是 ()
- A. $m \perp \alpha, n \parallel \beta, \alpha \perp \beta$
 - B. $m \perp \alpha, n \perp \beta, \alpha \parallel \beta$
 - C. $m \subset \alpha, n \parallel \beta, \alpha \perp \beta$
 - D. $m \subset \alpha, n \perp \beta, \alpha \parallel \beta$

10. (多选题)若“ $\forall x \in M, |x| > x$ ”为真命题, “ $\exists x \in M, x > 3$ ”为假命题, 则集合 M 可以是 ()
- A. $(-\infty, -5)$ B. $(-3, -1]$
 C. $(3, +\infty)$ D. $[0, 3]$

11. (多选题)已知函数 $f(x) = \ln(x^2 - 1)$, $g(x) = 2^x + m$, 则“对任意 $x_1 \in [-3, -2]$, 总存在 $x_2 \in [1, 2]$, 使得 $f(x_1) \leq g(x_2)$ ”的充分不必要条件可以是 ()

- A. $m \geq 2\ln 3 - 5$
 B. $m \geq 2\ln 3 - 4$
 C. $3\ln 2 - 4 \leq m < 0$
 D. $2\ln 3 - 3 \leq m < 0$

12. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 前 n 项和为 S_n , 试写出“ $S_{10} + S_{12} > 2S_{11}$ ”的一个充分不必要条件: _____.

13. [2023·吉林省实验中学模拟] 已知 $p: \exists x \in (0, 3), x^2 - a - 2\ln x \leq 0$. 若 p 为假命题, 则实数 a 的取值范围为 _____.

14. 已知集合 $A = \{x | x > 2\}$, $B = \{x | bx > 1\}$, 其中 b 为实数. 设 $p: x \in A$, $q: x \in B$.
- (1) 若 p 是 q 的充要条件, 则 $b =$ _____.
 (2) 若 p 是 q 的充分不必要条件, 则 b 的取值范围是 _____.

能力拓展

15. 对于任意实数 x , 用 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数, 例如: $[\pi] = 3$, $[0.1] = 0$, $[-2.1] = -3$, 则 “[x] > [y]”是“ $x > y$ ”的 ()
- A. 充分不必要条件
 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件
 D. 既不充分也不必要条件

16. [2024·重庆一中开学考] 已知函数 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的奇函数, 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 数列 $\{f(a_n)\}$ 的前 n 项和为 T_n , 则下列各项的两个条件中, p 是 q 的必要条件的是 ()

- A. $p: f(a_5) = 0, q: S_9 = 0$
 B. $p: S_{10} = 0, q: f(a_5 + a_6) = 0$
 C. $p: a_5 = 0, q: T_9 = 0$
 D. $p: T_{10} = 0, q: a_5 + a_6 = 0$

第4讲 基本不等式 (时间:45分钟)

基础热身

1. 若 $x > 0$, 则 $x + \frac{4}{x}$ 的最小值为 ()

- A. 2
- B. 3
- C. $2\sqrt{2}$
- D. 4

2. 设 $0 < a < b$, 则下列不等式中正确的是 ()

A. $a < b < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$

B. $a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$

C. $a < \sqrt{ab} < b < \frac{a+b}{2}$

D. $\sqrt{ab} < a < \frac{a+b}{2} < b$

3. 已知实数 a, b 满足 $a^2 + b^2 = 6$, 则 ab 的取值范围是 ()

- A. $(0, 3]$
- B. $(-\infty, 3]$
- C. $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$
- D. $[-3, 3]$

4. 若 $a > 0, b > 0, a+b=2$, 则 $\frac{a+b}{ab}$ 的最小值为 ()

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- B. $\sqrt{2}$
- C. 1
- D. 2

5. 已知实数 $x > 0$, 则 $2 - 3x - \frac{4}{x}$ 的最大值是 _____.

6. [2023·广东茂名三模] 已知 $0 < x < \frac{1}{3}$, 则 $x(1-3x)$ 的最大值是 _____.

综合提升

7. [2023·重庆南开中学月考] 若实数 x, y 满足 $x > 0, y > 0, 3xy - x - y - 1 = 0$, 则 xy 的最小值为 ()

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4

8. 已知 $0 < m < 1, 0 < n < 1$, 且 $2\log_4 m = \log_2(1-n)$, 则 $\frac{1}{m} + \frac{9}{n}$ 的最小值是 ()

- A. 18
- B. 16
- C. 10
- D. 4

9. 已知实数 x, y 满足 $x^2 - 2xy + 4y^2 = 2$, 则 $x + 2y$ 的最大值为 ()

- A. $\sqrt{2}$
- B. 2
- C. $2\sqrt{2}$
- D. 4

10. (多选题)若 $a > 0, b > 0, a + b = 4$, 则下列不等式对一切满足条件的 a, b 恒成立的是 ()

A. $\sqrt{ab} \leq 2$ B. $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq 2$
C. $\frac{a^2}{3} + b^2 \geq 4$ D. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 1$

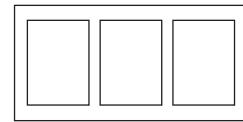
11. (多选题)[2023·东莞模拟] 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $e^a + e^b = 4$, 则 ()

A. $a + b \leq 2 \ln 2$ B. $e^a + b \leq 3$
C. $ab \geq 1$ D. $e^{2a} + e^{2b} \geq 8$

12. 函数 $y = \frac{x^2 + 2}{x - 1}$ ($x > 1$) 的最小值为 _____.

13. 若正实数 x, y 满足 $x + y = 3$, 且不等式 $\frac{4}{x+1} + \frac{16}{y} > m^2 - 3m + 5$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围为 _____.

14. 某校生物兴趣小组为开展课题研究, 分得一块面积为 32 m^2 的矩形空地, 并计划在该空地上设置三块全等的矩形试验区(如图所示). 要求试验区四周各空 0.5 m , 各试验区之间也空 0.5 m , 则每块试验区的面积的最大值为 _____ m^2 .



能力拓展

15. (多选题)若 $a, b, c \in \mathbf{R}$, 且 $ab + bc + ca = 1$, 则下列不等式成立的是 ()

A. $a + b + c \leq \sqrt{3}$
B. $(a + b + c)^2 \geq 3$
C. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 2\sqrt{3}$
D. $a^2 + b^2 + c^2 \geq 1$

16. [2023·山东菏泽模拟] 已知 a, b, c 均为正实数, $ab + ac = 4$, 则 $\frac{2}{a} + \frac{2}{b+c} + \frac{8}{a+b+c}$ 的最小值是 _____.



第6讲 函数的概念及其表示 (时间:45分钟)

基础热身

1. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} 3x, & x \geq 0, \\ f(x+3), & x < 0, \end{cases}$ 则 $f(-4)=$ ()

- A. 6 B. 2 C. 4 D. 8

2. 函数 $f(x)=\sqrt{x}+\frac{x+2}{\ln x}$ 的定义域为 ()

- A. $(0, 1)$
B. $(1, +\infty)$
C. $(0, +\infty)$
D. $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

3. 下列各组函数是同一个函数的为 ()

- A. $f(x)=x-1, g(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$
B. $f(x)=\sqrt{x^2}, g(x)=x$
C. $f(x)=\sqrt{-x^3}, g(x)=x\sqrt{-x}$
D. $f(x)=x^2-2x-1, g(s)=s^2-2s-1$

4. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(1-x)=\frac{1-x^2}{x^2}$ ($x \neq 0$),

- 则 $f(x)=$ ()

- A. $\frac{1}{(x-1)^2}-1 (x \neq 0)$
B. $\frac{1}{(x-1)^2}-1 (x \neq 1)$
C. $\frac{4}{(x-1)^2}-1 (x \neq 0)$
D. $\frac{4}{(x-1)^2}-1 (x \neq 1)$

5. 使函数 $f(x)=|\mathrm{e}^x-a|$ 的值域为 $[0, +\infty)$ 的一个 a 的值为 _____.

6. [2023·山东济宁二模] 已知 $a \in \mathbb{R}$, 函数

$$f(x)=\begin{cases} \log_2(x^2-3), & x>2, \\ 3^x+a, & x \leq 2, \end{cases}$$

$$f[f(\sqrt{5})]=2, \quad a=_____.$$

综合提升

7. [2023·河北衡水中学月考] 已知函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[0, 4]$, 则函数 $y=\frac{f(x+1)}{\sqrt{x-1}}+(x-2)^0$ 的定义域是 ()
- A. $(1, 5]$
B. $(1, 2) \cup (2, 5)$
C. $(1, 2) \cup (2, 3]$
D. $(1, 3]$

8. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(\mathrm{e}^{x-1})=2x-1, f(a)+f(b)=0$, 则下列结论正确的是 ()

- A. $a+b=1$ B. $a+b=\frac{1}{\mathrm{e}}$
C. $ab=1$ D. $ab=\frac{1}{\mathrm{e}}$

9. [2023·湖北荆州调研] 已知定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2x+1}{\sqrt{1+x^2}}$, 若

定义在 $(b, +\infty)$ 上的函数 $g(x) = \frac{a}{x}$ ($a > 0$) 的

值域与函数 $f(x)$ 的值域相同, 则 $\frac{a}{b} =$ ()

- A. 2 B. 1
C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

10. [2023·海南海口三模] 已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 不恒等于零, 同时满足 $f(x+y) = f(x)f(y)$, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) > 2024$, 那么当 $x < 0$ 时, 下列结论正确的为 ()

- A. $-1 < f(x) < 0$
B. $f(x) < -1$
C. $f(x) > 1$
D. $0 < f(x) < \frac{1}{2024}$

11. (多选题) 存在函数 $f(x)$, 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f[g(x)] = x$, 则函数 $g(x)$ 的解析式不可能为 ()

- A. $g(x) = \cos x$
B. $g(x) = \begin{cases} -x^2, & x \geq 0, \\ x^2, & x < 0 \end{cases}$
C. $g(x) = x^3 - x$
D. $g(x) = e^x - e^{-x}$

12. 函数 $y = \frac{2-\sin x}{1-\cos x}$ 的值域为 _____.

13. 定义符号函数 $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$ 则方程

$[1+\operatorname{sgn}(x)] \cdot \log_2 |x| + [1-\operatorname{sgn}(x)] \cdot 2^x = 1$ 的解的集合为 _____.

14. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0, \\ 2^{-x}, & x > 0, \end{cases}$ 则满足 $f(x) + f\left(x - \frac{1}{2}\right) > 1$ 的 x 的取值范围是 _____.

_____.

能力拓展

15. [2023·烟台一模] 高斯是德国著名的数学家, 近代数学奠基者之一, 享有“数学王子”的美誉. 函数 $f(x) = [x]$ 称为高斯函数, 其中 $x \in \mathbf{R}$, $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 例如 $[-1.1] = -2$, $[2.5] = 2$, 则方程 $[2x+1] + [x] = 4x$ 的所有解的和为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{4}$
C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{7}{4}$

16. 已知对任意的实数 a 均有 $3f(\sin a) - 4f(\cos a) = \sin^2 a \cos^2 a$, 则函数 $f(x)$ 的解析式为 _____.

第8讲 函数的奇偶性、对称性与周期性 (A) (时间:45分钟)

基础热身

1. [2024·山东潍坊、日照联考] 下列函数中既是奇函数又是增函数的是 ()

A. $y=3x$ B. $y=\frac{1}{x}$
 C. $y=2x^2$ D. $y=-\frac{1}{3}x$

2. 已知 $f(x)=ax^2+bx$ 是定义在 $[a-1, 2a]$ 上的偶函数, 那么 $a+b$ 的值是 ()

A. $-\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{3}$
 C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

3. 已知函数 $f(x)$ 是偶函数, 且当 $x>0$ 时, $f(x)=3^x+x+1$, 那么当 $x<0$ 时, $f(x)$ 的解析式是 ()

A. $f(x)=\frac{1}{3^x}-x+1$
 B. $f(x)=-\frac{1}{3^x}+x-1$
 C. $f(x)=\frac{1}{3^x}+x-1$
 D. $f(x)=-\frac{1}{3^x}-x+1$

4. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2^x+1}$, 则 ()

A. $f(x)$ 为奇函数
 B. $f(x)$ 为偶函数
 C. $f(x)$ 的图象关于点 $(0, \frac{1}{2})$ 对称
 D. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{1}{2}$ 对称

5. 若 $f(x)=3a-\frac{2}{3^x+1}$ 为奇函数, 则 $a=$ ()

A. 1 B. 0
 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{3}$

6. 已知函数 $f(x)=x^5+\tan x-3$, 且 $f(-m)=-2$, 则 $f(m)=$ _____.

综合提升

7. 若 $f(x)=\frac{a}{e^x+1}-1$ 为奇函数, 则 $g(x)=\ln[(x-1)(x-a)]$ 的单调递增区间是 ()

A. $(0, 1)$ B. $(1, +\infty)$
 C. $(\frac{3}{2}, +\infty)$ D. $(2, +\infty)$

8. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 在区间 $(-\infty, 0]$ 上单调递增, 且 $f(2)=0$, 则不等式 $(x+2)f(x)<0$ 的解集为 ()

A. $(2, +\infty)$
 B. $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$
 C. $(-2, 0)$
 D. $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$

9. (多选题) [2023·无锡四地三模] 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f(x+2)$ 为奇函数, $f(2x+1)$ 为偶函数, 则 ()

A. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称
 B. $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称
 C. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称
 D. $f(x)$ 的图象关于点 $(2, 0)$ 对称

10. (多选题) 若函数 $f(x)$ 同时满足:(1)对于定义域内的任意 x , 有 $f(x)+f(-x)=0$; (2)对于定义域内的任意 x_1, x_2 , 当 $x_1 \neq x_2$ 时, 有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$, 则称函数 $f(x)$ 为“理想函数”. 下列四个函数中是“理想函数”的是 ()

A. $m(x)=x^2$
 B. $g(x)=-x^3$
 C. $h(x)=\frac{1}{x}$
 D. $q(x)=\begin{cases} -x^2, & x \geqslant 0, \\ x^2, & x < 0 \end{cases}$

11. (多选题) [2024·山东临沂联考] 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, $f(1-2x)$ 为偶函数, $f(1)=3$, 则 ()

A. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称
 B. $f(x)$ 是周期为 4 的函数
 C. $f(1)+f(2)+\cdots+f(2023)=0$
 D. $f(x)$ 的图象关于点 $(3, 0)$ 对称

12. 若函数 $y=f(1-x)$ 的图象与函数 $y=f(2+x)$ 的图象关于直线 $x=m$ 对称, 则 $m=$ _____.

13. 由德国数学家黎曼发现并提出的黎曼函数定义在 $[0, 1]$ 上, 其定义为: $R(x)=\begin{cases} \frac{1}{q}, & x=\frac{p}{q} (p, q \text{ 都是正整数}, \frac{p}{q} \text{ 是既约真分数}), \\ 0, & x=0, 1 \text{ 和 } (0, 1) \text{ 内的无理数}. \end{cases}$
- 若函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上满足 $f(x)+f(-x)=0$ 且 $f(x)+f(2-x)=0$, 当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x)=R(x)$, 则 $f\left(\frac{10}{3}\right)+f\left(\frac{3}{10}\right)=$ _____.

14. 设 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 且对任意实数 x , 恒有 $f(x+2)=-f(x)$, 当 $x \in [0, 2]$ 时, $f(x)=2x-x^2$.
- 求证: $f(x)$ 是周期函数;
 - 当 $x \in [2, 4]$ 时, 求 $f(x)$ 的解析式;
 - 求 $f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(2025)$ 的值.

15. 已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(xy)=f(x)f(y)-f(x)-f(y)+2$, $f(0)<2$, $f(0) \neq f(1)$, 且 $f(x)>0$.
- 求 $f(0), f(1), f(-1)$ 的值;
 - 判断 $f(x)$ 的奇偶性, 并证明.

能力拓展

16. [2024 · 湖南长沙雅礼中学月考] 已知函数 $f(x), g(x)$ 的定义域均为 \mathbf{R} , $f(x+3)+f(x)=2$, 且 $y=f(3x-1)$ 为偶函数, 函数 $g(x)$ 满足 $g(x-2)+g(-x)=4$, 对于任意 $x \in [-3, 1]$, 均有 $f(x)+g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x+x^3$,

$$\text{则 } \frac{g(1)}{f(2023)}= \quad (\quad)$$

- A. $-\frac{49}{43}$ B. $-\frac{43}{49}$
 C. $\frac{65}{44}$ D. $\frac{44}{65}$

17. 已知函数 $f(x)$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x+4)=f(x)-f(2)$, 若 $y=f(x+1)$ 的图象关于直线 $x=-1$ 对称, 且对任意的 $x_1, x_2 \in [0, 2]$, 当 $x_1 \neq x_2$ 时, 都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_2-x_1}<0$, 则下列结论正确的是 (\quad)

- A. $\frac{1}{f(-3)}<\frac{1}{f(4)}<\frac{1}{f(5.5)}$
 B. $\frac{1}{f(-3)}<\frac{1}{f(5.5)}<\frac{1}{f(4)}$
 C. $\frac{1}{f(5.5)}<\frac{1}{f(-3)}<\frac{1}{f(4)}$
 D. $\frac{1}{f(4)}<\frac{1}{f(5.5)}<\frac{1}{f(-3)}$

第9讲 二次函数与幂函数 (时间:45分钟)

基础热身

1. 已知幂函数 $f(x) = x^a$ 的图象经过点 $(\sqrt{2}, 4)$, 则 $a =$ ()

A. $\sqrt{2}$ B. 2
C. 4 D. 8

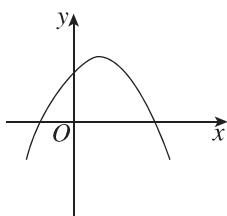
2. 如果一元二次函数 $y = 2x^2 + mx - 3$ 的图象的对称轴方程是 $x = \frac{1}{2}$, 那么当 $x = 1$ 时, $y =$ ()

A. -7 B. -5
C. -3 D. -1

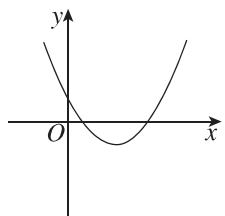
3. 函数 $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{2}x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上 ()

A. 有最大值, 无最小值
B. 有最大值, 有最小值
C. 无最大值, 无最小值
D. 无最大值, 有最小值

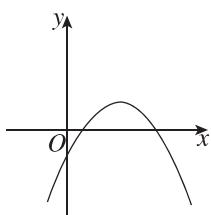
4. [2023·北京海淀区一模] 已知二次函数 $f(x)$, 对任意的 $x \in \mathbb{R}$, 都有 $f(2x) < 2f(x)$, 则 $f(x)$ 的大致图象可能是 ()



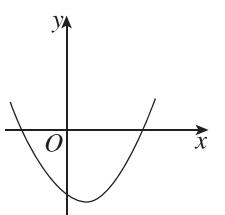
A



B



C



D

5. 已知幂函数 $f(x) = (m^2 - 3)x^{-m}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则实数 m 的值为 _____.

6. 设函数 $f(x) = \lg\left(x^2 - ax + \frac{1}{2}\right)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 则 a 的取值范围为 _____.

综合提升

7. 设 $a = \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$, $b = \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{5}}$, $c = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{4}}$, 则 a, b, c 的大小关系是 ()

A. $c < a < b$
B. $c < b < a$
C. $a < c < b$
D. $b < c < a$

8. [2023·全国甲卷] 已知函数 $f(x) = e^{-(x-1)^2}$, 记 $a = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $b = f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $c = f\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$, 则 ()

A. $b > c > a$
B. $b > a > c$
C. $c > b > a$
D. $c > a > b$

9. [2023·无锡期末] 已知函数 $f(x) = x^2 + 3$, 若存在区间 $[a, b] \subset (0, +\infty)$, 使得 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的取值范围为 $[k(a+1), k(b+1)]$, 则实数 k 的取值范围为 ()

A. $(0, 3)$
B. $[2, +\infty)$
C. $(2, 3]$
D. $(2, 3)$

10. 若二次函数 $f(x) = x^2 + bx + c$ 满足: ① $y = f(x-1)$ 是偶函数; ② 其图象截 x 轴所得的弦长为 2; ③ 其图象与函数 $g(x) = m|x|$ 的图象有两个不同的交点. 则实数 m 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, -2)$
B. $[0, 2)$
C. $(-2, 2)$
D. $(-2, 2]$

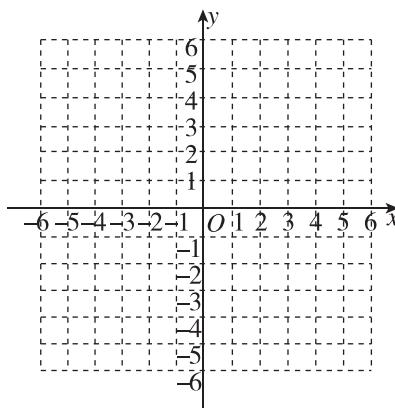
11. (多选题) 已知 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ($x_1 < x_2$) 是幂函数 $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ 图象上的任意两点, 则以下结论正确的是 ()

A. $x_1 f(x_1) < x_2 f(x_2)$
B. $\frac{f(x_1)}{x_1} < \frac{f(x_2)}{x_2}$ ($x_1, x_2 \neq 0$)
C. $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$
D. $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_2) + f(x_1)}{2}$

12. 函数 $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ 的单调递减区间是_____.

13. [2023·辽宁葫芦岛二模] 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & x \leq 3, \\ \frac{1}{3}x - 1, & x > 3, \end{cases}$ 则关于 x 的不等式 $f(1-x) < f(2-x)$ 的解集为_____.

14. 已知函数 $f(x) = |ax - 2|x + 3 (a \in \mathbf{R})$.
- 当 $a = 1$ 时, 画出函数 $y = f(x)$ 的图象;
 - 当 $x > 0$ 时, $f(x) > x$ 恒成立, 求 a 的取值范围.



15. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + 2 (a, b \text{ 为实数})$.
- 若函数图象过点 $(1, 1)$, 对任意 $x \in \mathbf{R}, y > 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;
 - 若函数图象过点 $(1, 1)$, 对任意 $a \in [-2, -1], y > 0$ 恒成立, 求实数 x 的取值范围;
 - 对任意 $x \in \mathbf{R}, b > 0$ 时, $y \geq 0$ 恒成立, 求 $\frac{a+2}{b}$ 的最小值.

能力拓展

16. [2023·石家庄部分重点高中月考] 已知函数 $f(x) = 4x^4 - 6tx^3 + (2t^2 + 6)x^2 - 3tx + 1 (x > 0)$, 若 $f(x)$ 的最小值为 0, 则 $t =$ ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
C. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ D. $2\sqrt{2}$

17. (多选题)已知函数 $f(x) = x^2 + 2x$, 若存在实数 t , 使得当 $x \in [1, m]$ 时, $f(x+t) \leq 3x$ 恒成立, 则实数 m 的值可以为 ()

- A. 3 B. 6
C. 9 D. 12

第 11 讲 对数与对数函数

(时间:45分钟)

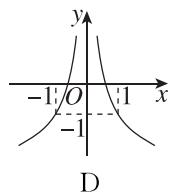
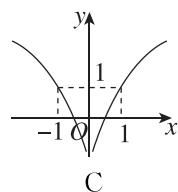
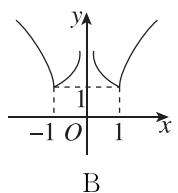
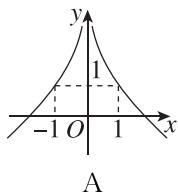
基础热身

1. 函数 $y = \sqrt{\log_{0.5}(3x-2)}$ 的定义域是 ()

A. $\left[\frac{2}{3}, 1\right)$ B. $(\frac{2}{3}, +\infty)$

C. $(0, 1]$ D. $\left(\frac{2}{3}, 1\right]$

2. 函数 $f(x) = \log_a |x| + 1 (0 < a < 1)$ 的图象大致为 ()



3. 已知函数 $f(x) = \log_2(3x-1)$, 则使得 $2f(x) > f(x+2)$ 成立的 x 的取值范围是 ()

A. $(-\frac{5}{3}, +\infty)$

B. $(\frac{4}{3}, +\infty)$

C. $(-\infty, -\frac{1}{3})$

D. $(-\frac{1}{3}, +\infty)$

4. 已知 $a = \log_3 \frac{3}{2}$, $b = \log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{2}$, $c = 2^{-\frac{1}{2}}$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()

A. $a < c < b$

B. $a < b < c$

C. $b < c < a$

D. $c < a < b$

5. 化简: $(\log_6 2)^2 + \log_6 2 \times \log_6 3 + 2\log_6 3 - 6^{\log_6 2} =$ _____.

6. 若函数 $f(x) = \ln(ax^2 + x + 2)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 则实数 a 的取值范围为 _____; 若此函数的值域为 \mathbf{R} , 则实数 a 的取值范围为 _____.

综合提升

7. [2024·江西九江调研] 北京时间 2023 年 2 月 10 日 0 时 16 分, 经过约 7 小时的出舱活动, 神舟十五号航天员费俊龙、邓清明、张陆密切协同, 圆满完成出舱活动全部既定任务, 出舱活动取得圆满成功. 载人飞船进入太空需要运载火箭, 火箭在发射时会产生巨大的噪声, 已知声音的声强级 $d(x)$ (单位: dB) 与声强 x (单位: W/m^2) 满足关系式: $d(x) = 10 \lg \frac{x}{10^{-12}}$. 若某人交谈时的声强级约为 60 dB, 且火箭发射时的声强与此人交谈时的声强的比值约为 $10^{7.8}$, 则火箭发射时的声强级约为 ()

A. 125 dB B. 132 dB

C. 138 dB D. 156 dB

8. 已知 $2^m = 6^n = 10$, 则 $3, m \cdot n, m+n$ 的大小关系是 ()

A. $m \cdot n < m+n < 3$

B. $m \cdot n < 3 < m+n$

C. $3 < m+n < m \cdot n$

D. $3 < m \cdot n < m+n$

9. [2024·江西丰城中学模拟] 若函数 $f(x) = \begin{cases} -\log_2(3-x)^m, & x < 1, \\ x^2 - 6x + m, & x \geqslant 1 \end{cases}$ 的值域为 \mathbf{R} , 则 m 的取值范围是 ()

A. $(0, 8]$

B. $(0, \frac{9}{2}]$

C. $[\frac{9}{2}, 8]$

D. $(-\infty, -1] \cup (0, \frac{9}{2}]$

10. (多选题) 已知 $a > 0, b > 0$, 且满足 $b^a = 9, a + \log_3 b = 3$, 则 b 的可能取值为 ()

A. $\frac{1}{3}$ B. 3 C. $\frac{1}{9}$ D. 9

11. (多选题) 已知函数 $f(x) = \lg \frac{x^2 + 1}{|x|}$, 则下列说法正确的有 ()

- A. 函数 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称
- B. 当 $x > 0$ 时, $f(x)$ 单调递增, 当 $x < 0$ 时, $f(x)$ 单调递减
- C. 函数 $f(x)$ 的最小值是 $\lg 2$
- D. 函数 $f(x)$ 的图象与直线 $x=2$ 有四个交点

12. [2024·江西萍乡期末] 把满足 $\log_2 3 \times \log_3 4 \times \dots \times \log_{n+1}(n+2)$, $n \in \mathbb{N}^*$ 为整数的 n 叫作“贺数”, 则在区间(1, 50)内所有“贺数”的和是_____.

13. 若函数 $f(x) = \begin{cases} \lg|x-m|, & x > 1, \\ x^2 - 2, & x \leq 1 \end{cases}$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 则实数 m 的取值范围为_____.

14. 函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, $f(0)=1$, 当 $x>0$ 时, $f(x)=\ln x+2^x$.

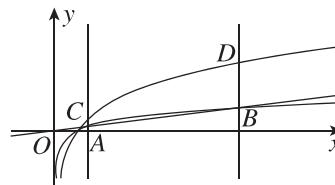
- (1) 函数 $f(x)$ 的解析式;
(2) 解不等式 $f[\log_2(2x-5)]>2$.

15. [2023·江苏镇江质检] 已知函数 $f(x)=(\log_2 x-2)(\log_4 x-\frac{1}{2})$.

- (1) 当 $x \in [2, 4]$ 时, 求该函数的取值范围;
(2) 若 $f(x) \geq m \log_4 x$ 对任意 $x \in [4, 16]$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

能力拓展

16. (多选题)[2024·杭州模拟] 已知过原点 O 的一条直线与函数 $y=\log_8 x$ 的图象交于 A, B 两点, 分别过点 A, B 作 y 轴的平行线, 与函数 $y=\log_2 x$ 的图象交于 C, D 两点, 则 ()



- A. 点 A, D 和原点 O 在同一条直线上
B. 点 C, D 和原点 O 在同一条直线上
C. 当 BC 平行于 x 轴时, 则点 A 的横坐标为 $\sqrt{3}$
D. 当 BC 平行于 x 轴时, 则点 A 的纵坐标为 $3\log_2 \sqrt{3}$

17. 已知实数 $a, b \in (1, +\infty)$, 且 $\log_3 a + \log_b 3 = \log_3 b + \log_a 4$, 则 ()
A. $\sqrt{a} < b < a$ B. $b < \sqrt{a} < a$
C. $\sqrt{a} < a < b$ D. $a < b < \sqrt{a}$

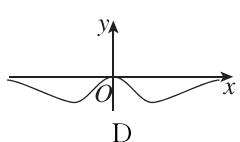
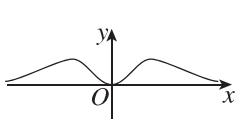
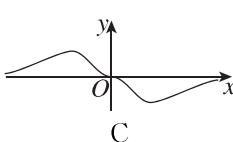
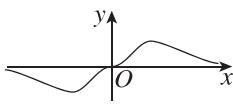
第12讲 函数的图象

(时间:45分钟)

基础热身

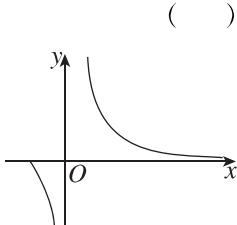
1. 函数 $f(x)=2^x$ 的图象与函数 $g(x)=-x+6$ 的图象的交点个数为 ()
- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

2. [2023·天津河北区一模] 函数 $f(x)=\frac{x^3}{3^x+3^{-x}}$ 的大致图象是 ()



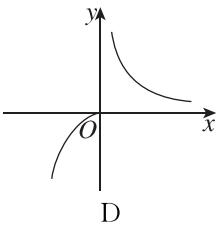
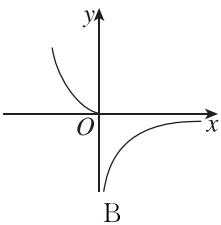
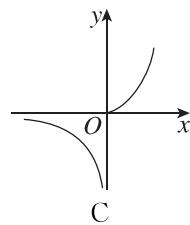
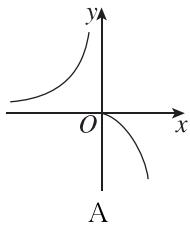
3. [2024·河北衡水十三中模拟] 如图是函数 $f(x)=\frac{\sqrt{x+a}}{x^b}$ ($a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{N}^*$) 的部分图象, 则 ()

- A. $a>0, b$ 是奇数
B. $a<0, b$ 是奇数
C. $a>0, b$ 是偶数
D. $a<0, b$ 是偶数



4. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x \geqslant 0, \\ \frac{1}{x}, & x < 0, \end{cases}$, $g(x)=f(-x)$, 则 ()

函数 $g(x)$ 的大致图象是

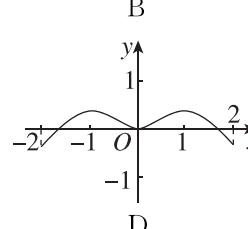
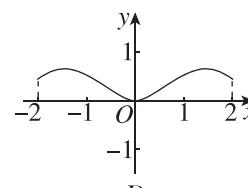
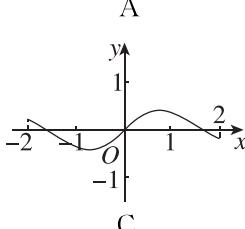
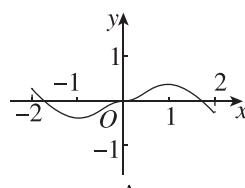


5. 把函数 $y=\log_3(x-1)$ 的图象向右平移 1 个单位长度, 再把所得图象上各点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{4}$ (纵坐标不变), 则所得图象的函数解析式是 _____.

6. [2022·浙江卷] 已知函数 $f(x)=\begin{cases} -x^2+2, & x \leqslant 1, \\ x+\frac{1}{x}-1, & x > 1, \end{cases}$, 则 $f(f(\frac{1}{2}))=$ _____; 若当 $x \in [a, b]$ 时, $1 \leqslant f(x) \leqslant 3$, 则 $b-a$ 的最大值是 _____.

综合提升

7. 函数 $f(x)=\frac{2x \sin x}{e^x+e^{-x}}$ (e 为自然对数的底数) 在 $[-2, 2]$ 上的大致图象是 ()



8. [2024·安徽A10联盟联考] 已知函数 $f(x)$ 的部分图象如图所示, 则 $f(x)$ 的解析式可能为 ()

A. $f(x)=x^3 \cdot \ln|x|$

B. $f(x)=e^{|x|} \cdot (x^2-1)$

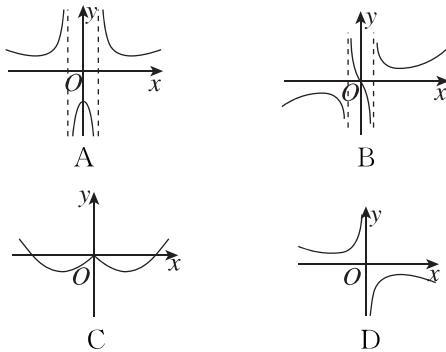
C. $f(x)=\frac{x^3-x}{e^{|x|}}$

D. $f(x)=\frac{x-x^3}{2^x}$

9. [2023 · 武汉调研] 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq a, \\ 2^x, & x > a, \end{cases}$ 若 $f(x)$ 的值域是 \mathbf{R} , 则实数 a 的取值范围是 ()
 A. $(-\infty, 0]$ B. $[0, 1]$
 C. $[0, +\infty)$ D. $(-\infty, 1]$

10. 若关于 x 的不等式 $x^2 - \log_a(x+1) < 2x - 1$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 上恒成立, 则实数 a 的取值范围为 ()
 A. $\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{-4}, 1\right)$ B. $\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{-4}, 1\right)$
 C. $\left(1, \left(\frac{3}{2}\right)^4\right]$ D. $\left(\frac{3}{2}, \left(\frac{3}{2}\right)^4\right]$

11. (多选题) 已知函数 $f(x) = \frac{a^x + b \cdot a^{-x}}{x^2 + c}$, $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 则 $f(x)$ 的大致图象可以是 ()



12. (多选题) 设 $x \in \mathbf{R}$, 用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 则 $y = [x]$ 称为高斯函数, 也叫取整函数, 例如 $[2.3] = 2$. 令函数 $f(x) = x - [x]$, 则以下结论正确的有 ()
 A. $f(-1.7) = 0.3$
 B. $f(x+1) = f(x)$
 C. $f(x)$ 的最大值为 1, 最小值为 0
 D. $y = f(x)$ 与 $y = x - 1$ 的图象有 2 个交点

13. 用 $\max\{a, b, c\}$ 表示 a, b, c 三个数中的最大值, 则 $f(x) = \max\{3^x, 2x+1, 3-4x^2\}$ 在区间 $[0, 2]$ 上的最大值 M 和最小值 m 分别是 _____.

14. [2024 · 山东聊城模拟] 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 5, & x \leq -1, \\ |\ln(x+1)|, & x > -1, \end{cases}$, 若函数 $y = f(x-1) - g(x)$ 恰有 3 个零点, 则实数 m 的取值范围为 _____.

能力拓展

15. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 满足 $f(x-2) = 2f(x)$, 且当 $x \in [-2, 0)$ 时, $f(x) = -2x(x+2)$. 若对任意 $x \in [m, +\infty)$, 都有 $f(x) \leq \frac{3}{4}$, 则实数 m 的取值范围是 ()
 A. $\left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$ B. $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$
 C. $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ D. $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$

16. [2023 · 北京卷] 设 $a > 0$, 函数 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x < -a, \\ \sqrt{a^2 - x^2}, & -a \leq x \leq a, \\ -\sqrt{x}-1, & x > a, \end{cases}$ 给出下列四个结论:
 ① $f(x)$ 在区间 $(a-1, +\infty)$ 上单调递减;
 ② 当 $a \geq 1$ 时, $f(x)$ 存在最大值;
 ③ 设 $M(x_1, f(x_1))$ ($x_1 \leq a$), $N(x_2, f(x_2))$ ($x_2 > a$), 则 $|MN| > 1$;
 ④ 设 $P(x_3, f(x_3))$ ($x_3 < -a$), $Q(x_4, f(x_4))$ ($x_4 \geq -a$), 若 $|PQ|$ 存在最小值, 则 a 的取值范围是 $(0, \frac{1}{2}]$.
 其中所有正确结论的序号是 _____.

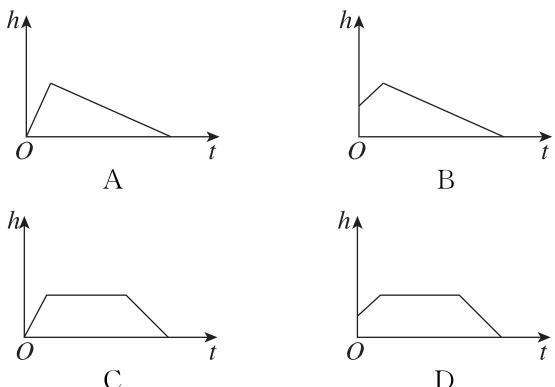
第14讲 函数模型及其应用 (时间:45分钟)

基础热身

1. 我国西北某地长期土地沙漠化严重,近几年通过各种方法防沙治沙效果显著,两年间沙地面积从500公顷下降为320公顷,则这两年的平均下降率为 ()

A. 9% B. 10%
C. 18% D. 20%

2. 游泳池原有一定量的水,打开进水阀进水,过了一段时间关闭进水阀,再过一段时间打开排水阀排水,直到水排完.已知进水时的流量、排水时的流量各保持不变.用 h 表示游泳池的水深, t 表示时间,则下列函数图象中能反映所述情况的是 ()



3. 某大型家电商场在一周内计划销售 A, B 两种电器,已知这两种电器每台的进价都是1万元,若厂家规定一家商场在一周内进货 B 种电器的台数不高于 A 种电器台数的2倍,且进货 B 种电器至少2台, A, B 两种电器每台的售价分别为1.2万元和1.25万元.若该家电商场每周可以用来进货 A, B 两种电器的总资金为6万元,所进电器都能销售出去,则该商场在一周内销售 A, B 两种电器的总利润的最大值为(利润=售价-进价) ()

A. 1.2万元 B. 2.8万元
C. 1.6万元 D. 1.4万元

4. 有些家用电器(如冰箱等)使用了氟化物,氟化物的释放破坏了大气上层的臭氧层,使臭氧含量 Q 随时间 t (单位:年)呈指数型函数变化,当氟化物的排放量维持在某种水平时,满足关系式 $Q = Q_0 e^{-0.0025t}$,其中 Q_0 是臭氧的初始量,估计臭氧含量减少 $\frac{3}{4}$ 需要(取 $\ln 2 \approx 0.69$) ()

A. 276年 B. 552年
C. 414年 D. 483年

5. 地震震级是对地震本身能量大小的相对量度,用 M 表示, M 可通过地震面波质点运动最大值 $(A/T)_{\max}$ 进行测定,计算公式如下: $M = \lg(A/T)_{\max} + 1.66 \lg \Delta + 3.5$ (其中 Δ 为震中距).若某地发生6.0级地震,测得 $(A/T)_{\max} = 0.001$,则可以判断(参考数据: $2^{0.313} \approx 1.242$, $5^{0.313} \approx 1.655$) ()

A. 震中距在2000~2020之间
B. 震中距在2040~2060之间
C. 震中距在2070~2090之间
D. 震中距在1040~1060之间

6. 某超市在“五一”活动期间推出如下线上购物优惠方案:一次性购物在99元以内(含99元),不享受优惠;一次性购物在99元以上(不含99元),299元以内(含299元),一律享受九折优惠;一次性购物在299元以上(不含299元),一律享受八折优惠.小敏和小昭在该超市购物,分别挑选了原价为70元和280元的商品,如果两人把商品合并由小昭一次性付款,并把合并支付比他们分别支付节省的钱按照两人购买商品原价的比例分配,则小敏需要给小昭 _____ 元.

综合提升

7. [2023·北京西城区一模] 在不考虑空气阻力的条件下,火箭的最大速度 v (km/s)和燃料的质量 M (kg)以及火箭(除燃料外)的质量 N (kg)之间的关系为 $v = 2 \ln \left(1 + \frac{M}{N}\right)$.若火箭的最大速度为12 km/s,则下列各数中与 $\frac{M}{N}$ 最接近的是(参考数据: $e \approx 2.718$) ()

A. 200 B. 400 C. 600 D. 800

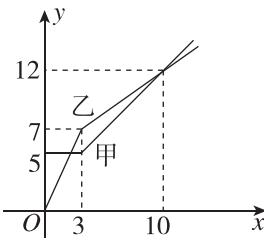
8. [2024·南京模拟] 新风机的工作原理是从室外吸入空气,净化后输入室内,同时将等体积的室内空气排向室外.假设某房间的体积为 v_0 ,初始时刻室内空气中含有颗粒物的质量为 m .已知某款新风机工作时,单位时间内从室外吸入的空气体积为 v ($v > 1$),室内空气中颗粒物的浓度与时刻 t 的函数关系为 $\rho(t) = (1 - \lambda) \frac{m}{v_0} + \lambda \frac{m}{v_0} e^{-vt}$,其中常数 λ 为过滤效率.若该款新风机

的过滤效率为 $\frac{4}{5}$,且 $t = 1$ 时室内空气中颗粒物的浓度是 $t = 2$ 时的 $\frac{3}{2}$ 倍,则 v 的值约为(参考数据: $\ln 2 \approx 0.6931$, $\ln 3 \approx 1.0986$) ()

A. 1.3862 B. 1.7917
C. 2.1972 D. 3.5834

9. (多选题)某打车平台欲对收费标准进行改革,现制订了甲、乙两种方案供乘客选择,其支付费用 y (单位:元)与打车距离 x (单位:千米)的函数关系大致如图所示,则下列说法正确的是 ()

- A. 当打车距离为 8 千米时,乘客选择乙方案省钱
- B. 当打车距离为 10 千米时,乘客选择甲、乙方案均可
- C. 当打车距离为 3 千米以上时,甲方案每千米增加的费用比乙方案多
- D. 甲方案中,当打车距离在 3 千米内(含 3 千米)付费 5 元,当打车距离大于 3 千米时,每增加 1 千米费用增加 0.7 元



10. 用指数模型 $y = e^{0.44t}$ 描述累计一个池塘甲种微生物的数量 y 随时间 t (单位:天)的变化规律,则该池塘甲种微生物的数量增加到原来的 3 倍需要的时间约为 _____ 天. ($\ln 3 \approx 1.10$, 结果精确到 0.1)

11. 我们知道,声音通过空气传播时会引起区域性的压强值改变,物理学中称为“声压”,用 P 表示(单位:Pa),声压级 SPL (单位:dB)表示声压的相对大小,已知 $SPL = k \lg \frac{P}{2 \times 10^{-5}}$ (k 是常数). 当声压级 SPL 提高 60 dB 时,声压 P 会变为原来的 1000 倍.

- (1)求声压级 SPL 关于声压 P 的函数解析式.
- (2)已知两个不同的声源产生的声压 P_1, P_2 叠加后得到的总声压 $P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2}$,一般当声压级 $SPL < 45$ dB 时人类是可以正常的学习和休息的. 现窗外同时有两个声压级为 40 dB 的声源,在不考虑其他因素的情况下,请问这两个声源叠加后是否会干扰我们正常的学习? 请说明理由.

(参考数据: $\lg 2 \approx 0.3$)

能力拓展

12. 中国茶文化博大精深,茶水的口感与茶叶类型和水的温度有关. 经验表明,有一种茶用 85 °C 的水泡制,再等到茶水温度降至 55 °C 时饮用,可以产生最佳口感. 某研究人员在室温下,每隔 1 min 测一次茶水温度,得到数据如下:

放置时间/min	0	1	2	3	4	5
茶水温度/°C	85.00	79.00	73.60	68.74	64.37	60.43

为了描述茶水温度 y (°C)与放置时间 x (min)的关系,现有以下两种函数模型供选择:

- ① $y = ka^x + 25$ ($k \in \mathbb{R}, 0 < a < 1, x \geq 0$);
- ② $y = kx + b$ ($k, b \in \mathbb{R}, x \geq 0$).

选择最符合实际的函数模型,可求得刚泡好的茶水达到最佳口感所需放置的时间大约为(参考数据: $\lg 2 \approx 0.301, \lg 3 \approx 0.477$) ()

- A. 6 min
- B. 6.5 min
- C. 7 min
- D. 7.5 min

13. 某服装厂生产一批羽绒服,由于受生产能力和技术水平的限制,会产生一些次品,其次品率 p 与日产量 x (单位:万件)之间满足关系: $p = \begin{cases} \frac{1}{12-x}, & 0 \leq x \leq m, \\ \frac{3}{4}, & x > m \end{cases}$ (其中 m 为小于 12 的正整数). 已知每生产 1 万件合格的羽绒服可以盈利 3 万元,但每生产 1 万件次品将亏损 1 万元,故厂方希望定出合适的日产量(注:次品率=次品数/生产量,如 $p=0.1$ 表示每生产 10 件产品,有 1 件为次品,其余为合格品).

- (1)试将生产这批羽绒服每天的盈利额 y (万元)表示为日产量 x (万件)的函数;
- (2)当日产量为多少时,可获得最大利润?